Dioptre sous incidence oblique.

Un dioptre plan (d'équation $z = 0$) sépare un milieu d'indice n_1 (côté $z < 0$) d'un milieu d'indice n_2 (côté $z > 0$) ; les deux milieux sont diélectriques isotropes linéaires, non magnétiques et non conducteurs. Une onde plane incidente se propage dans la direction du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_i}$ faisant avec la normale $\overrightarrow{e_z}$ au dioptre un angle θ_1 ; les ondes réfléchie et transmise ont pour vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_t}$ faisant avec la normale $\overrightarrow{e_z}$ au dioptre les angles θ_1 et θ_2, avec, selon les lois de Snell-Descartes

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

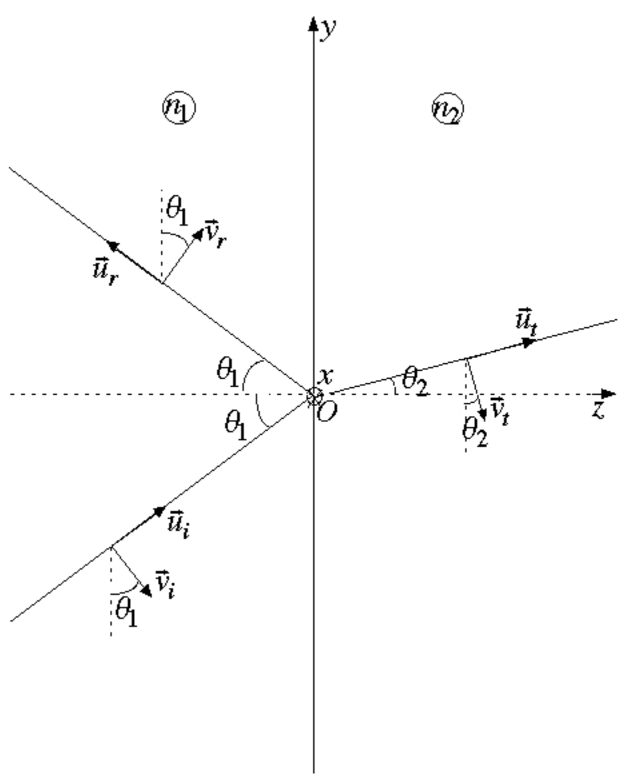
Selon cette même loi les vecteurs $\overrightarrow{u_i}$, $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_t}$ sont coplanaires et on prend ce plan comme plan yOz. On se place dans le cas où l'onde incidente et donc, par symétrie, les ondes réfléchie et transmise, sont polarisées rectilignement avec le champ électrique dans le plan d'incidence yOz. On notera dans ce plan $\overrightarrow{v_i}$, $\overrightarrow{v_r}$ et $\overrightarrow{v_t}$, les vecteurs directement perpendiculaires respectivement à $\overrightarrow{u_i}$, $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_t}$. Les champs électriques des trois ondes sont notés, en faisant intervenir les coefficients de réflexion et de transmission r et t définis par ces mêmes notations

$$\overrightarrow{E_i} = E_0 \, exp\, \jmath \left(\omega\, t - \overrightarrow{k_i} \cdot \overrightarrow{OM}\right) \, \overrightarrow{v_i}$$

$$\overrightarrow{E_r} = r\, E_0 \, exp\, \jmath \left(\omega\, t - \overrightarrow{k_r} \cdot \overrightarrow{OM}\right) \, \overrightarrow{v_r}$$

$$\overrightarrow{E_t} = t\, E_0 \, exp\, \jmath \left(\omega\, t - \overrightarrow{k_t} \cdot \overrightarrow{OM}\right) \, \overrightarrow{v_t}$$

Tout ceci est résumé sur la figure ci-dessous :



Question 1 :
Quels sont les champs magnétiques associés à ces trois ondes ?

La structure trirectangle classique en remplaçant c par c/n permet d'affirmer

$$\overrightarrow{B_i} = \frac{n_1}{c}\, \overrightarrow{u_i} \wedge \overrightarrow{E_i} = \frac{n_1\, E_0}{c}\, exp\, \jmath \left(\omega\, t - \overrightarrow{k_i} \cdot \overrightarrow{OM}\right)\, \overrightarrow{u_i} \wedge \overrightarrow{v_i} = \frac{n_1\, E_0}{c}\, exp\, \jmath \left(\omega\, t - \overrightarrow{k_i} \cdot \overrightarrow{OM}\right)\, \overrightarrow{e_x}$$

et de même

$$\overrightarrow{B_r} = \frac{n_1}{c}\,\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{E_r} = \frac{n_1\,r\,E_0}{c}\,exp\,\jmath\left(\omega\,t - \overrightarrow{k_r}\cdot\overrightarrow{OM}\right)\,\overrightarrow{e_x}$$

$$\overrightarrow{B_t} = \frac{n_2}{c}\,\overrightarrow{u_t} \wedge \overrightarrow{E_t} = \frac{n_2\,t\,E_0}{c}\,exp\,\jmath\left(\omega\,t - \overrightarrow{k_t}\cdot\overrightarrow{OM}\right)\,\overrightarrow{e_x}$$

Question 2 :
Quelles sont les composantes continues du champ électromagnétique ? En déduire les coefficients de réflexion et de transmission.

Rappelons tout d'abord que pour $M \in xOy$ les trois exponentielles doivent avoir même argument, ce qui du reste permet, dans le cours, de démontrer les lois de Snell-Descartes

La composante normale (selon Oz donc) de $\overrightarrow{B}$ est continue, ce qui n'apprend rien car tous les champs magnétiques sont selon Ox. La composante tangentielle de $\overrightarrow{E}$ l'est aussi, soit, puisque les projections des vecteurs $\overrightarrow{v}$ sont apparaître des $\cos\theta$ et que, côté $z < 0$, se superposent les ondes incidente et réfléchie :

$$-E_0\,exp\,\jmath(\cdots)\,\cos\theta_1 + r\,E_0\,exp\,\jmath(\cdots)\,\cos\theta_1 = -t\,E_0\,exp\,\jmath(\cdots)\,\cos\theta_2$$

Cette seule relation ne suffit pas. Affirmons, puisque le programme ne nous permet pas de le démontrer, que si les milieux sont non magnétiques et non conducteurs, le champ magnétique tangentiel (selon Ox ici) est lui aussi continu, car dans ce contexte, il n'y a pas de de courants surfaciques ; donc

$$\frac{n_1\,E_0}{c}\,exp\,\jmath(\cdots) + \frac{n_1\,r\,E_0}{c}\,exp\,\jmath(\cdots) = \frac{n_2\,t\,E_0}{c}\,exp\,\jmath(\cdots)$$

Après simplifications, nous avons donc le système

$$\cos\theta_1 - r\,\cos\theta_1 = t\,\cos\theta_2$$

$$n_1 + n_1\,r = n_2\,t$$

La résolution en est simple et conduit à

$$r = \frac{n_2\,\cos\theta_1 - n_1\,\cos\theta_2}{n_2\,\cos\theta_1 + n_1\,\cos\theta_2} \qquad \text{et} \qquad t = \frac{2\,n_1\,\cos\theta_1}{n_2\,\cos\theta_1 + n_1\,\cos\theta_2}$$

Question 3 :
Calculer les vecteurs de Poynting moyens des trois ondes.

Attention à revenir aux notations réelles (Tu ne multiplieras pas les amplitudes complexes, dit la Loi). On a donc

$$\overrightarrow{\Pi_i} = \frac{\overrightarrow{E_i}\wedge\overrightarrow{B_i}}{\mu_0} = \frac{n_1\,E_0^2}{\mu_0\,\mathrm{c}}\,\cos^2\left(\omega\,t - \overrightarrow{k_i}\cdot\overrightarrow{OM}\right)\,\overrightarrow{v_i}\wedge\overrightarrow{e_x} = \frac{n_1\,E_0^2}{\mu_0\,\mathrm{c}}\,\cos^2\left(\omega\,t - \overrightarrow{k_i}\cdot\overrightarrow{OM}\right)\,\overrightarrow{u_i}$$

$$\left\langle\overrightarrow{\Pi_i}\right\rangle = \frac{n_1\,E_0^2}{2\,\mu_0\,\mathrm{c}}\,\overrightarrow{u_i}$$

de même

$$\left\langle\overrightarrow{\Pi_r}\right\rangle = \frac{n_1\,r^2\,E_0^2}{2\,\mu_0\,\mathrm{c}}\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\left\langle\overrightarrow{\Pi_t}\right\rangle = \frac{n_2\,t^2\,E_0^2}{2\,\mu_0\,\mathrm{c}}\,\overrightarrow{u_t}$$

Question 4 :
Définir, dans ce contexte, les coefficients de réflexion et de transmission en énergie et les calculer.

Définir T par $\|\langle\overrightarrow{\Pi_t}\rangle\|/\|\langle\overrightarrow{\Pi_i}\rangle\|$ n'est pas pertinent. En effet une surface d'aire S du dioptre, de vecteur surface $\overrightarrow{S} = S\,\overrightarrow{e_z}$ reçoit une puissance moyenne

$$\langle\mathcal{P}_i\rangle = \overrightarrow{\langle\Pi_i\rangle}\cdot\overrightarrow{S} = \frac{n_1\,E_0^2}{2\,\mu_0\,\mathrm{c}}\,\cos\theta_1$$

de même

$$\langle\mathcal{P}_r\rangle = -\frac{n_1\,r^2\,E_0^2}{2\,\mu_0\,\mathrm{c}}\,\cos\theta_1$$

$$\langle\mathcal{P}_t\rangle = \frac{n_2\,t^2\,E_0^2}{2\,\mu_0\,\mathrm{c}}\,\cos\theta_2$$

Le signe de $\langle\mathcal{P}_r\rangle$ n'est lié qu'au sens de propagation ; d'où la définition et les calculs suivants

$$R = \frac{|\langle\mathcal{P}_r\rangle|}{\langle\mathcal{P}_i\rangle} = r^2 = \frac{(n_2\,\cos\theta_1 - n_1\,\cos\theta_2)^2}{(n_2\,\cos\theta_1 + n_1\,\cos\theta_2)^2}$$

$$T = \frac{\langle\mathcal{P}_t\rangle}{\langle\mathcal{P}_i\rangle} = \frac{n_2\,\cos\theta_2}{n_1\,\cos\theta_1}\,t^2 = \frac{4\,n_1\,n_2\,\cos\theta_1\,\cos\theta_2}{(n_2\,\cos\theta_1 + n_1\,\cos\theta_2)^2}$$

On vérifie aisément que $R + T = 1$, ce qui traduit la conservation de l'énergie.

Remarque 1 : Pour des champs polarisés avec $\overrightarrow{E}$ perpendiculaire au plan d'incidence, le même genre de calculs conduit à des formules *différentes*.

Remarque 2 : Pour un dioptre séparant des milieux d'indices n_1 et n_2 donnés, R et T apparaissent comme des fonctions des deux variables θ_1 et θ_2 ; cette apparence est fallacieuse car θ_2 se déduit de θ_1 par la loi de Snell-Descartes et donc R et T ne sont fonctions que de θ_1

Remarque 3 : On trouve parfois l'élégante variante qui consiste à multiplier r et t haut et bas par $\sin\theta_2$ pour utiliser la loi de Snell-Descartes, par exemple pour r :

$$r = \frac{n_2\,\cos\theta_1\,\sin\theta_2 - n_1\,\cos\theta_2\,\sin\theta_2}{n_2\,\cos\theta_1\,\sin\theta_2 + n_1\,\cos\theta_2\,\sin\theta_2} = \frac{n_1\,\cos\theta_1\,\sin\theta_1 - n_1\,\cos\theta_2\,\sin\theta_2}{n_1\,\cos\theta_1\,\sin\theta_1 + n_1\,\cos\theta_2\,\sin\theta_2} =$$

$$= \frac{\cos\theta_1\,\sin\theta_1 - \cos\theta_2\,\sin\theta_2}{\cos\theta_1\,\sin\theta_1 + \cos\theta_2\,\sin\theta_2} = \frac{\sin(2\,\theta_1) - \sin(2\,\theta_2)}{\sin(2\,\theta_1) + \sin(2\,\theta_2)}$$

voire

$$r = \frac{\sin(2\,\theta_1) - \sin(2\,\theta_2)}{\sin(2\,\theta_1) + \sin(2\,\theta_2)} = \frac{2\,\sin(\theta_1-\theta_2)\,\cos(\theta_1+\theta_2)}{2\,\sin(\theta_1+\theta_2)\,\cos(\theta_1-\theta_2)} = \frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}$$

mais, compte tenu de la remarque 2, cette élégance est un peu vaine.

Question 5 :
Montrer que pour cette polarisation, le rayon réfléchi peut disparaître.

r s'annule pour

$$n_2\,\cos\theta_1 = n_1\,\cos\theta_2$$

or

$$n_2\,\sin\theta_2 = n_1\,\sin\theta_1$$

d'où, par division membre à membre

$$\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_1} = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_2}$$

$$\sin\theta_2\,\cos\theta_2 = \sin\theta_1\,\cos\theta_1$$

$$sin(2\,\theta_1) = sin(2\,\theta_2)$$

ce qui du reste ressort d'une des expressions de la remarque 3.

Or $\theta_1 = \theta_2$ est exclu par la loi de Snell-Descartes ; donc $2\,\theta_2 = \pi - 2\,\theta_1$ et $\theta_2 = \pi/2 - \theta_1$. Reportons dans la loi de Snell-Descartes

$$n_1 \, \sin\theta_1 = n_2 \, \sin(\pi/2 - \theta_1) = n_2 \, \cos\theta_1$$

donc

$$\tan\theta_1 = \frac{n_2}{n_1}$$

et

$$\tan\theta_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = \frac{1}{\tan\theta_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

c'est ce qu'on appelle l'incidence de Brewster.